

Опис магнітних властивостей квантових кілець з урахуванням спін-орбітальної взаємодії

В даній роботі представлені теоретичні розрахунки впливу ефекту спін-орбітальної (СО) взаємодії на намагніченість і магнітну сприйнятливість малих напівпровідникових квантових кілець. Розрахунки проводились в одно-електронному наближенні. Показана залежність намагніченості та магнітної сприйнятливості від параметрів кільця та величини прикладеного магнітного поля. Було обговорено вплив складових СО взаємодії в представленні Рашба та Дрессельхауса на енергетичні рівні електронів. Показано, що стрибкоподібна зміна намагніченості і магнітної сприйнятливості в малих магнітних полях є наслідком перетину спін-розщеплених електронних рівнів в енергетичному спектрі. Розщеплення енергетичних рівнів відбувається завдяки СО взаємодії. Детальні чисельні обрахунки з використанням параметрів InSb напівпровідникових квантових кілець демонструють збільшення парамагнетизму в кільцях. Існує також додаткова можливість керувати ефектом за допомогою зовнішнього електричного поля.

We present a theoretical calculation of the effect of the spin-orbital interaction on the electron magnetization and magnetic susceptibility of small semiconductor quantum rings. The study is based on a simple effective one-band approximation. The dependence of the magnetization and susceptibility on parameters of the rings and the applied external magnetic field is studied. Contributions of the bulk inversion asymmetry (the Dresselhaus term) and the system inversion asymmetry (the Rashba term) to the spin splitting and magnetic effect of the electron energy states are discussed. The abrupt changes of the magnetization and susceptibility at low magnetic fields are attributed to the crossing between the spin-split electron energy levels. The splitting of the levels is happened due to the spin-orbit interaction. Detailed calculation using parameters of InSb semiconductor quantum ring demonstrates an enhancement of paramagnetism of the ring. There is an additional possibility to control the effect by external electric fields.

1. Вступ.

Внаслідок вдосконалення нанотехнологій нещодавно стало можливим створення систем квантових точок та кілець, що відрізняються одна від одної кількістю цих точок чи кілець та величиною хімічного потенціала в них. Це зробило актуальним доскональне вивчення енергетичного спектру електронів [2,7] та процесів намагнічування у різноманітних квантових структурах, що й проводилося вельми інтенсивно протягом останнього десятиліття [6,8,12,13,21,22,23]. Ці дослідження, по-перше, надають важливу інформацію про спінову динаміку атомних кластерів в зовнішньому магнітному полі, й по-друге, утворюють науковий базис для подальшого розвитку нової галузі електроніки – спітроніки [4,17]. З погляду спітроніки спінові стани електронів в квантових структурах є елементами, що уможливають реалізацію qubit-масивів пам'яті в квантових комп'ютерах [9]. Це завдання вимагає вивчення магнітних властивостей квантових структур для ефективного керування їх спіновим станом.

Дана робота має на меті показати вплив спін-орбітальної взаємодії на магнітні властивості квантових кілець в слабкому магнітному полі. Розглянуті намагніченість та магнітна сприйнятливість циліндричних квантових кілець за наявності спін-орбітальної взаємодії. Такий розгляд дозволив описати властивості малих квантових кілець у напівпровідниках. Розрахунки виконані для напівпровідника InSb. Показано, що теоретичні залежності намагніченості від магнітного поля демонструють дуже цікаву поведінку в області низьких температур та слабких магнітних полів. Серед цих особливостей – різка зміна намагніченості та магнітної сприйнятливості у низьких магнітних полях, що зумовлена перетином електронних рівнів, яка виникає в наслідок спін-орбітальної взаємодії. З'ясовано, також, що намагніченість квантової точки залежить від величини магнітного поля, та від кількості електронів в ній. Крім цього показано, що величиною намагніченості можна керувати за допомогою зовнішнього електричного поля (змінюючи вигляд обмежуючого потенціалу) або задаючи певну висоту кільця.

Структура енергетичного спектру електронів впливає на величину намагніченості квантових структур [2,20,24]. У той самий час, спін-орбітальна взаємодія відіграє велику роль у формуванні електронного спектру III-V напівпровідникових наноструктур [3,5]. Навіть у разі симетричної потенціальної ями для електронів, ця взаємодія знімає спінове виродження в нульовому магнітному полі. Це змінює електронні властивості напівпровідникової наноструктури [15,19,25,26].

При дослідженні впливу спін-орбітальної взаємодії на намагніченість та магнітну сприйнятливість квантових кілець слід включити до потенціалу спін-орбітальної взаємодії доданок, що описує взаємодію Рашби [3,19] та Дрессельхауса [5].

2. Загальний розгляд проблеми

Застосуємо для опису властивостей магнітних кілець простий модельний потенціал, що описує ізольоване кільце, яке розташоване в площині XY [22]:

$$V_c(r) = \frac{a_1}{r^2} + a_2 r^2 - V_0, \quad (1)$$

$$\text{де } V_0 = 2\sqrt{a_1 a_2}.$$

В даній моделі радіус та ширина кільця можуть бути обрані незалежно, необхідним підбором лише двох параметрів моделі (a_1, a_2). У граничному випадку така модель дозволяє описати властивості квантової точки. В цій моделі без врахування СО взаємодії аналітично отримані енергетичний спектр та намагніченість за нульової температури і хвильові функції у сталому магнітному полі, що прикладено перпендикулярно до площини кільця [22].

Потенціал (1) має наступні властивості:

а) існує мінімум $V(r_0) = 0$ за значення

$$r = r_0 = \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad (2)$$

яке визначає середній радіус кільця;

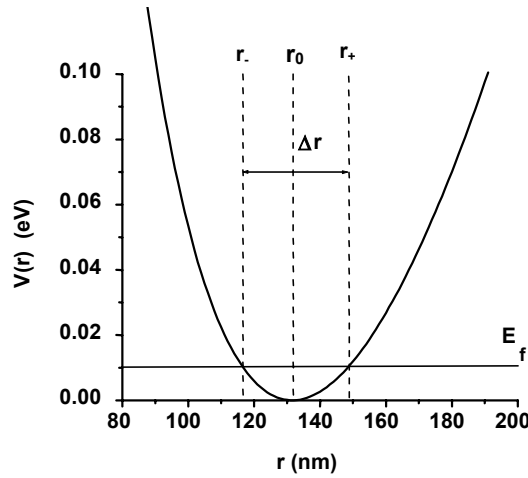


Рис. 1 Профіль потенціалу квантового кільця.

б) Для $r \approx r_0$ потенціал має просту параболічну форму $V(r) \approx \frac{1}{2} m \omega_0^2 (r - r_0)^2$ (рис.1),

де $\omega_0 = \sqrt{\frac{8a_2}{m}}$ характеризує розмір потенціальної ями, m - ефективна маса електрона.

Потенціал (1) також можна застосувати для опису кількох інших фізичних систем, серед яких

(а) 1D кільце, $r_0 = const$ і $\omega_0 \rightarrow \infty$; (б) 2D пряма провідка $\omega_0 = const$ і $r_0 \rightarrow \infty$; (в) квантова точка $a_1 = 0$; (г) ізольована анти точка $a_2 = 0$.

Нехай магнітне поле прикладене перпендикулярно до площини XY. Тоді гамільтоніан електрона в циліндричних координатах (r, φ) набуває вигляду:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m(E)} \left[\frac{\partial}{r \partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] - \frac{i}{2} \hbar \omega_c(E, B) \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{1}{8} m(E) \omega_c^2(E, B) r^2 + V_c(r) + V_{SO}^R(r, \varphi) + V_{SO}^D(r, \varphi) + \frac{1}{2} \sigma_z \mu_B g B, \quad (3)$$

де $\omega_c(E, B) = eB / m(E)$ циклотронна частота електрона.

Електрон-електронною взаємодією нехтуємо. Ефективна маса електрона визначається формулою [19]

$$\frac{1}{m(E)} = \frac{1}{m(0)} \frac{E_g (E_g + \Delta)}{(3E_g + 2\Delta)} \left[\frac{2}{E + E_g} + \frac{1}{E + E_g + \Delta} \right], \quad (4)$$

де E - енергія електрона в зоні провідності, $m(E)$ - ефективна маса електрона біля дна зони провідності, E_g та Δ - ширина забороненої зони та величина спин-орбітального розщеплення валентної зони, відповідно,

$$g(E) = 2 \left[1 - \frac{m_0}{m(E)} \frac{\Delta}{3(E_g + E) + 2\Delta} \right] - \quad (5)$$

ефективний g -фактор [18], $\mu_B = e\hbar / 2m_0$ - магнетон Бора, e та m_0 заряд та маса вільного електрона, відповідно.

Складова Дресельхауса спин-орбітальної взаємодії має вигляд [10,11]

$$V_{so}^D(r, \varphi) = \beta \left[\Sigma_\varphi \left(k_\varphi + \frac{e}{2\hbar} Br \right) + \Sigma_r k_r \right], \quad (6)$$

де k_r, k_φ - оператори проекції хвильового числа на відповідні напрямки,

$$k_\varphi = -\frac{i}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad k_r = -i \cdot \frac{\partial}{\partial r} \quad (7)$$

β - параметр Дресельхауса обернено-пропорційний до квадрату висоти квантового кільця [16]:

$$\beta = \gamma_C \cdot \left(\frac{\pi}{z_0} \right)^2, \quad (8)$$

де γ_C – константа, яка визначається для матеріалу напівпровідника з якого утворене квантове кільце [16], z_0 – висота квантового кільця.

Матриці Паулі – $\Sigma_r, \Sigma_\varphi, \sigma_z$ в циліндричних координатах мають вигляд:

$$\Sigma_r = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\varphi} \\ e^{-i\varphi} & 0 \end{pmatrix}, \quad \Sigma_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & ie^{i\varphi} \\ -ie^{-i\varphi} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Складова Рашби у спин-орбітальній взаємодії визначається формулою [10,11,15,19]:

$$V_{so}^R(r, \varphi) = \sigma_z \alpha \frac{dV_c(r)}{dr} \left(k_\varphi + \frac{e}{2\hbar} Br \right), \quad (10)$$

де α – параметр спин-орбітального зв'язку [19].

Отже, гамільтонін (3) можна переписати так:

$$H = H_0 + \sigma_z \alpha a_2 r^2 \frac{eB}{\hbar} + 2i\sigma_z \alpha a_1 \frac{1}{r^4} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \sigma_z \alpha a_1 \frac{1}{r^2} \frac{eB}{\hbar} + V_{so}^D(r, \varphi), \quad (11)$$

де

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m(E)} \left[\frac{\partial}{r\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] - \frac{i}{2} \hbar \omega_c(E, B) \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{1}{8} m(E) \omega_c^2(E, B) r^2 + V_c(r) + \frac{1}{2} \sigma_z \mu_B g B - 2\alpha \sigma_z a_2 \frac{i\partial}{\partial \varphi}. \quad (12)$$

Стационарне рівняння Шреденгера з гамільтоніаном H_0 має аналітичний розв'язок. Його рівні енергії та хвильові функції мають вигляд:

$$E_{n,l,s}^0 = \left(n + \frac{1}{2} + \frac{L}{2} \right) \hbar \omega - \frac{l}{2} \hbar \omega_c - V_0 + \sigma_z \left[\frac{\mu_B}{2} g(E_{n,l,s}) B + 2\alpha a_2 l \right], \quad (13)$$

$$\Psi_{n,l,s}^0(r, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(i l \varphi) R_{n,l,s}^0(r), \quad (14)$$

$$R_{n,l,s}^0(r) = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\Gamma[n+M+1]}{2^M n! (\Gamma[M+1])^2} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{4} \left(\frac{r}{\lambda} \right)^2} \left(\frac{\rho}{\lambda} \right)^M {}_1F_1 \left(-n, L+1, \frac{1}{2} \left(\frac{r}{\lambda} \right)^2 \right), \quad (15)$$

де n – головне квантове число; l, σ_z – проекції на вісь z орбітального та спінового квантового моменту електрона відповідно, ${}_1F_1$ – функція Кумера.

$$\omega = \sqrt{\omega_C^2 + \frac{8a_2}{m(E)}}, \quad L = \sqrt{l^2 + \frac{2a_1 m(E)}{\hbar^2}}, \quad \lambda = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}. \quad (16)$$

Згідно до роботи [25], хвильову функцію гамельтоніана (3) будемо шукати у вигляді

$$\Psi(r, \varphi) = \sum_{n,l} e^{i l \varphi} R_{n,l}^0(r) \left[A_l^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + B_l^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]. \quad (17)$$

Запишемо стационарне рівняння Шредінгера і отримаємо систему рівнянь

$$(E_{n,l,+1}^0 - E) A_l^n + \alpha \sum_m \left\{ \frac{eB}{\hbar} a_2 G_l^{nm} - a_1 \frac{eB}{\hbar} \Pi_l^{nm} - 2a_1 l \xi_l^{nm} \right\} A_l^m + i\beta \sum_m \left\{ (l-1) I_l^{nm} - P_l^{nm} + \frac{e}{2\hbar} J_l^{nm} \right\} B_{l-1}^m = 0, \quad (18)$$

$$(E_{n,l,-1}^0 - E) B_l^n - \alpha \sum_m \left\{ \frac{eB}{\hbar} a_2 G_l^{nm} - a_1 \frac{eB}{\hbar} \Pi_l^{nm} - 2a_1 l \xi_l^{nm} \right\} B_l^m - i\beta \sum_m \left\{ (l+1) K_l^{nm} + D_l^{nm} + \frac{e}{2\hbar} B L_l^{nm} \right\} A_{l+1}^m = 0. \quad (19)$$

Тут введені позначення:

$$G_l^{nm} = \int_0^\infty r^3 R_{n,l}^0(r) R_{m,l}^0(r) dr, \quad (20)$$

$$\Pi_l^{nm} = \int_0^\infty \frac{1}{r} R_{n,l}^0(r) R_{m,l}^0(r) dr, \quad (21)$$

$$\xi_l^{nm} = \int_0^\infty \frac{1}{r^3} R_{n,l}^0(r) R_{m,l}^0(r) dr, \quad (22)$$

$$I_l^{nm} = K_{l-1}^{mn} = \int_0^\infty R_{n,l}^0(r) R_{m,l-1}^0(r) dr, \quad (24)$$

$$J_l^{nm} = L_{l-1}^{mn} = \int_0^{\infty} r^2 R_{n,l}^0(r) R_{m,l-1}^0(r) dr, \quad (25)$$

$$P_l^{nm} = \int_0^{\infty} r R_{n,l}^0(r) \frac{d}{dr} R_{m,l-1}^0(r) dr, \quad (26)$$

$$D_l^{nm} = \int_0^{\infty} r R_{n,l}^0(r) \frac{d}{dr} R_{m,l+1}^0(r) dr. \quad (27)$$

Система рівнянь (18,19) може бути записана в матричній формі $A_l = \hat{M}B_{l-1}$ та $B_l = \hat{N}A_{l+1}$ відповідно.

Спектр енергій електрона в квантовому кільці можна чисельно розрахувати з рівняння:

$$\det(\hat{I} - \hat{M}\hat{N}) = \det(\hat{I} - \hat{N}\hat{M}) = 0. \quad (28)$$

В чисельних розрахунках обмежимося матрицею рангу 10. Для InSb квантового кільця з вибраними параметрами відносна похибка шести найнижчих енергетичних рівнів буде меншою за 10^{-4} .

Розглянемо вплив спіно-орбітальної взаємодії на магнітні властивості системи квантових кілець. Температурна залежність середньої намагніченості M та магнітної сприйнятливості χ такої системи пов'язана з усталеним значенням хімічного потенціалу рівностями

$$M = \sum_{n,l,s} \left(-\frac{\partial E_{n,l,s}}{\partial B} \right) f(E_{n,l,s} - \xi), \quad (29)$$

та

$$\chi = \frac{\partial M}{\partial B}, \quad (30)$$

де $f(E)$ - функція розподілу Фермі, ξ - хімічний потенціал системи, що визначається рівнянням

$$N = \sum_{n,l,s} f(E_{n,l,s} - \xi), \quad (31)$$

де N - загальна кількість електронів в квантовому кільці.

3. Результати розрахунків

Для InSb квантового кільця обираємо: $m(0) = 0.014m_0$, $E_g = 0.24eV$, $\Delta = 0.81eV$, $\alpha = 500 \text{ \AA}^2$ [25], $\gamma_c = 160eV \text{ \AA}^3$ [16]. Для модельного розрахунку форму кільця задаємо параметрами: $a_1 = 1000eV(nm)^2$, $a_2 = 0.01meV/(nm)^2$. Обрахуємо наступні параметри квантового кільця: внутрішній радіус кільця $r_- = 65 \text{ nm}$, зовнішній радіус кільця $r_+ = 89 \text{ nm}$, ширину кільця $\Delta r = 24 \text{ nm}$ та середній радіус кільця $r_0 = 76 \text{ nm}$.

На рис. 2 наведений енергетичний спектр електронів, що знаходяться в квантових кільцях у таких випадках: а) без урахування СО взаємодії в представленні Дрессельхауса (даний випадок відповідає $z_0 = \infty$ в рівнянні 8), б) з урахуванням СО взаємодії для $z_0 = 12nm$, с) з урахуванням СО взаємодії для $z_0 = 10nm$, д) з урахуванням СО взаємодії для $z_0 = 9nm$.

Як видно з рис. 2,а вплив СО взаємодії в представленні Рашба призводить до розщеплення енергетичних рівнів. Цей вплив був детально обговорений в нашій роботі [1]. За досить великих товщин ($z_0 > 20nm$, для даної конфігурації квантового кільця) складова Дрессельхауса СО взаємодії мала, тому нею можна знехтувати. З рис. 2, б,с,д видно, що СО взаємодія в представленні Дрессельхауса призводить до зміни величини розщеплення енергетичних рівнів. Ефективність впливу визначається товщиною квантового кільця (див. (8)). Так для $z_0 = 12nm$ спіно-орбітальні взаємодії в представленні Рашба та Дрессельхауса практично компенсують одна одну, в нульовому магнітному полі (рис. 2,б). При подальшому зменшенні товщини квантового кільця складова Дрессельхауса вже переважає складову Рашба (рис. 2, с,д). Тут збільшення складової Дрессельхауса призводить до збільшення розщеплення енергетичних рівнів при $|l| > 0$. Відповідно, значення поля, за яких відбувається перетин енергетичних рівнів, збільшуються (рис. 2, с,д). В даному випадку, при зменшенні z_0 рівні з однаковим напрямком спіна та орбітального моменту опускаються відносно рівнів з направленими в протилежні боки векторами спіна та орбітального моменту електрона.

Проведемо дослідження магнітних властивостей квантових кілець при $z_0 = 9nm$ та $z_0 = 10nm$. Врахування СО взаємодії приводить до виникнення стрибків намагніченості при заповненні 4-ма -5-ма електронами квантового кільця та при нульовій температурі. (рис. 3,4). Це явище відбувається внаслідок перетину енергетичних рівнів з $|l| = 1$ (рис. 2, с,д).

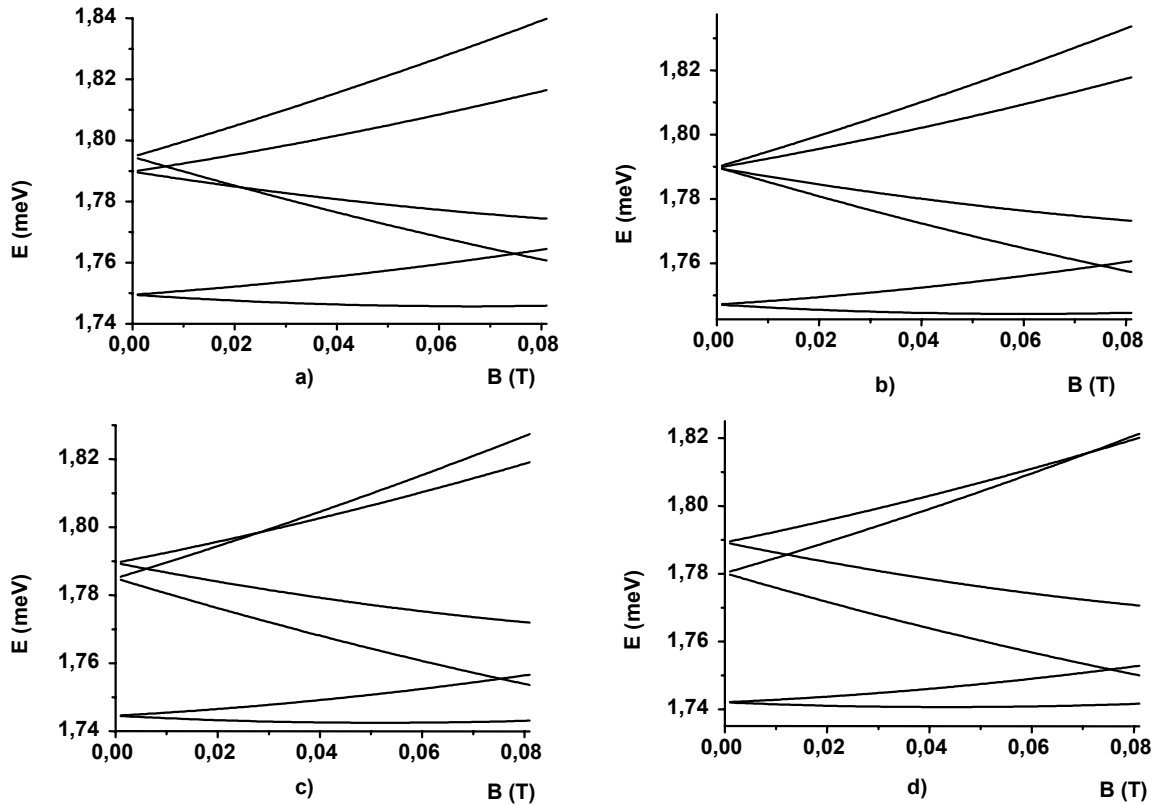


Рис. 2. Енергетичний спектр InSb кільця при врахуванні спин-орбітальної взаємодії а) лише в представленні Рашба; б),с),д) - як в представленні Рашба так и Дрессельхауса: б) $z_0 = 12nm$; с) $z_0 = 10nm$; д) $z_0 = 9nm$.

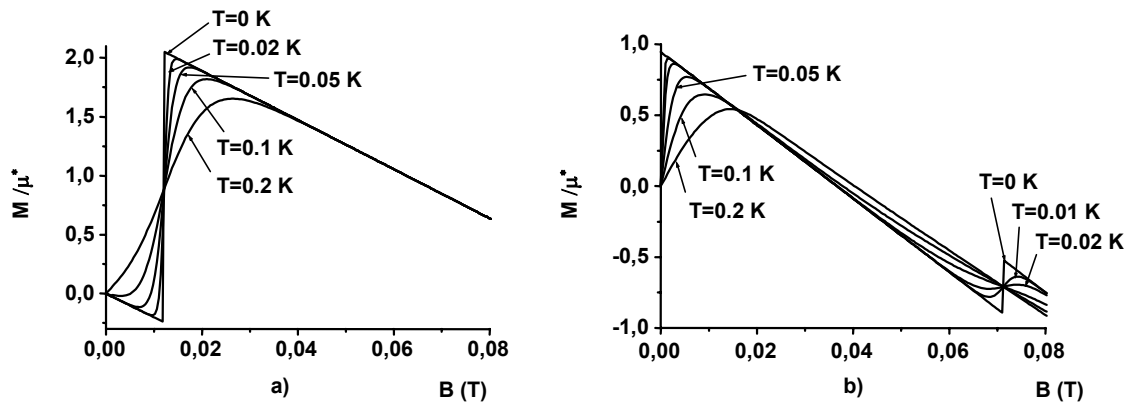


Рис. 3. Температурна залежність намагніченості квантового кільця при $z_0=9$ nm від магнітного поля для 4-х електронів (а) та 5-и електронів (б) в квантовому кільці.

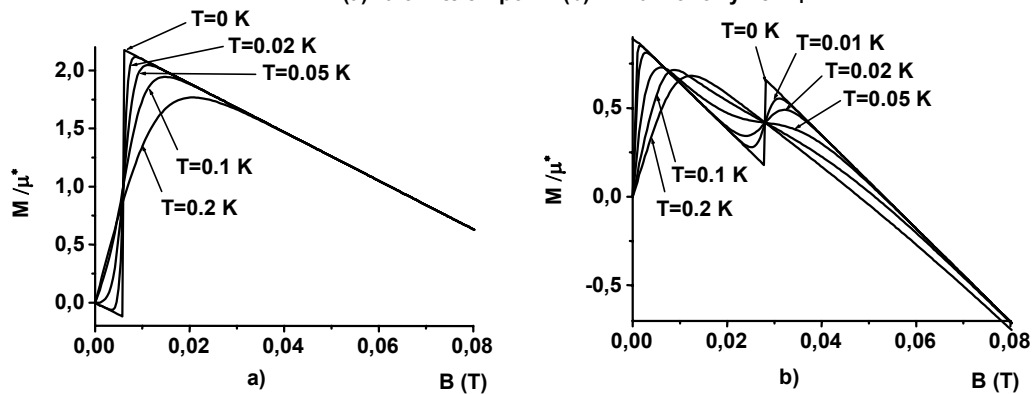


Рис. 4. Температурна залежність намагніченості квантового кільця при $z_0=10$ nm від магнітного поля для 4-х електронів (а) та 5-и електронів (б) в квантовому кільці.

Якщо прослідкувати за енергетичним спектром квантового кільця з $z_0 = 9nm$ (рис.2с), то можна дійти висновку, що при збільшенні магнітного поля і досягненні ним величини $B_1 = 1.2 * 10^{-2} T$, відбувається перетин енергетичних рівнів $E_{0,1,1}$ та $E_{0,-1,1}$. Цей факт зумовлює різкий стрибок величини намагніченості квантового кільця з чотирма електронами (рис. 3, а). У той самий час завдяки спин-орбітальній взаємодії стрибок намагніченості кільця з п'ятьма електронами відбувається при більшому значенні магнітного поля $B_2 = 7.1 * 10^{-2} T$. Коли $z_0 = 10nm$ стрибки намагніченості відбуваються при $B_1 = 0.6 * 10^{-2} T$ та $B_2 = 2.8 * 10^{-2} T$, відповідно.

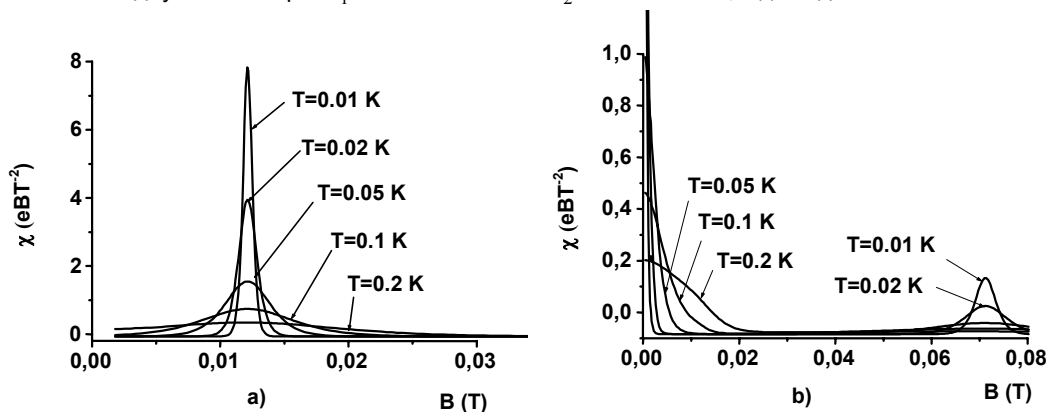


Рис. 5. Температурна залежність магнітної сприйнятливості при $z_0=9$ nm від магнітного поля для 4-х електронів (а) та 5-и електронів (б) в квантовому кільці.

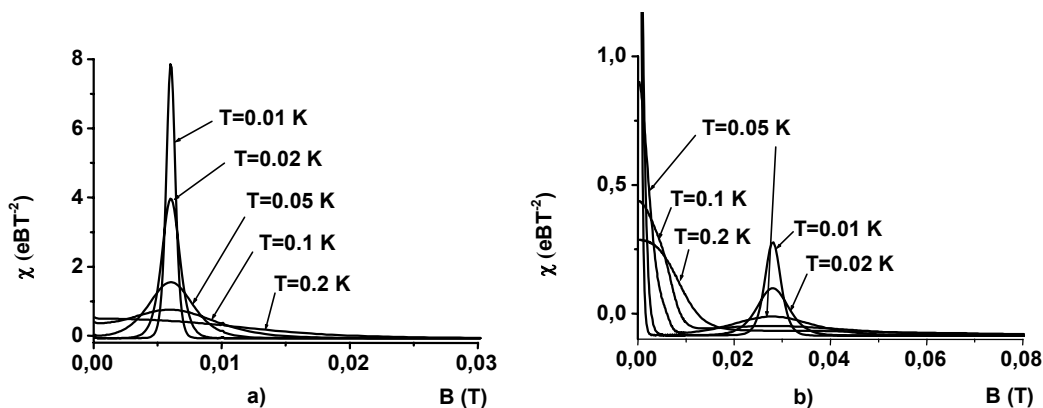


Рис. 6. Температурна залежність магнітної сприйнятливості при $z_0=10$ nm від магнітного поля для 4-х електронів (а) та 5-и електронів (б) в квантовому кільці.

Зумовлені спин-орбітальною взаємодією особливості процесу намагнічування квантових кілець яскраво відбиваються на їх магнітній сприйнятливості. На рис. 5,6. показані залежності магнітної сприйнятливості кільця з 4-ма та 5-ма електронами від величини магнітного поля. За нульової температури теоретична залежність диференціальної магнітної сприйнятливості виглядає як дельта-функція, що пов'язано зі стрибком намагніченості. За ненульової температури виникають парамагнітні піки скінченної висоти та ширини. Для випадку квантових кілець з 3-ма, 4-ма та 5-ма електронами положення піків, що обумовлені спин-орбітальною взаємодією, визначається товщиною квантового кільця. Зауважимо, що положенням піків можна керувати також за допомогою зовнішнього електричного поля (яке направлено нормально до площини кільця) [3,19].

4. Висновки.

В результаті впливу СО взаємодії, при нульовому магнітному полі, виникає розщеплення енергетичних рівнів електронів, що знаходяться в квантовому кільці. Розщеплення енергетичних рівнів приводить до появи перетину енергетичних рівнів у випадку прикладеного магнітного поля. Це суттєво впливає на магнітні явища квантових кілець.

Величина магнітного поля, за якої відбувається стрибок намагніченості, залежить від співвідношення складових СО взаємодії, що введені Рашбою та Дрессельхаусом. У відносно товстих квантових кільцях домінує складова СО взаємодії яка введена Рашбою. При зменшенні товщини більшою стає складова Дрессельхауса.

Перетин рівнів енергії може бути наслідком і електрон-електронної взаємодії як такої [6,13]. Для повного опису системи потрібно розглядати багатоелектронну систему з врахуванням як спин-орбітальної так і електрон-електронної взаємодії [7]. На підтвердження цієї думки, нещодавні дослідження [14] виявили, що вплив електрон-електронної взаємодії в системах з сильною локалізацією може збільшити прояв спин-орбітальної взаємодії.

Описані вище особливості квантових кілець у III-V напівпровідниках можуть бути використані у практичній спінтроніці.

1. *Bauzha O. S., Voskoboynikov O. M., Tretyak O. V., Sinyavskij O. S.*, Magnetic properties of quantum rings in the presents of spin-orbit interaction // *Ukr. Fiz. Zh.*, -2006. -Vol. 51.
2. *Bimberg D.*, Quantum dots: Paradigm changes in semiconductor physics // *Semiconductors* -1999. -Vol. 33.
3. *Bychkov Yu. A. and Rashba E. I.*, Spectrum of a 2D electron gas in an inversion layer // *J. Phys. C.* -1984. -Vol. 17.
4. *Das Sarma S., Fabian J., Hu X., and Zutic I.*, Spin quantum computation in silicon nanostructures // *Solid State communications* -2001. -Vol. 119.
5. *Dresselhaus G.*, Spin-Orbit Coupling Effects in Zinc Blende Structures // *Phys. Rev.* -1955. -Vol. 100.
6. *Jean-Jacques S. De Groote, Hornos J. E. M., and Chaplik A. V.*, Thermodynamic properties of quantum dots in a magnetic field // *Phys. Rev. B* -1992. -Vol. 46.
7. *Kouwenhoven L. P., Austing D. G., and Tarucha S.*, Few-electron quantum dots // *Rep. Prog. Phys.* -2001. -Vol. 64.
8. *Krasny Y. P., Kovalenko N. P., Krey U., and Jacak L.*, Paramagnetic-diamagnetic interplay in quantum dots for non-zero temperatures // *J. Phys.: Cond. Matter* -2001. -Vol. 13.
9. *Loss D. and DiVincenzo D. P.*, Quantum computation with quantum dots // *Phys. Rev. A* -1998. -Vol. 57.
10. *Magaril L. I. and Chaplik A. V.*, Kinetics of two-dimensional electrons on a curved surface // *Zh. Eks. Teor. Fiz.* -1999. -Vol. 115.
11. *Magaril L. I., Romanov D. A. and Chaplik*, Ballistic transport and spin-orbit interaction of two-dimensional electrons // *Zh. Eks. Teor. Fiz.* -1998. -Vol. 113.
12. *Magnusdottir I. and Gudmundsson V.*, Magnetization of noncircular quantum dots // *Phys. Rev. B* -2000. -Vol. 61.
13. *Maksym P. A., Chakraborty T.*, Large Regions of Stability in the Phase Diagrams of Quantum Dots and the Associated Filling Factors // *Phys. Rev.* -1992. B -Vol. 45.
14. *Maksym P. A., Imamura H., Mallon G. P., and Aoki H.* Molecular aspects of electron correlation in quantum dots // *J. Phys.: Condens. Matter* -2000. -Vol. 22.
15. *Moroz A. V. and Barnes C. H. W.*, Spin-orbit interaction as a source of spectral and transport properties in quasi-one-dimensional systems // *Phys. Rev. B* -2000. -Vol. 61.
16. *Pikus G. E., Marushchak V. A., and Titkov A. N.* Spin splitting of energy-bands and spin relaxation of carriers in cubic III-V crystals // *Soviet Physics Semiconductors.* -1988. -Vol. 22.
17. *Prinz G. A.*, Magnetoelectronics // *Science*, -1998. -Vol. 282.
18. *Roth L. M., Lax B., and Zwerdling S.*, Theory of optical magneto-absorption effects in semiconductors // *Phys. Rev.* -1959. -Vol. 114.
19. *E. A. de Andrada e Silva, G. C. La Rocca, and F. Bassani*, Spin-orbit splitting of electronic states in semiconductors asymmetric quantum wells // *Phys. Rev. B* -1997. -Vol. 55.
20. *Steffens O., Suhrke M., and Rossler U.*, Shell structure and exchange-related spin effects for quantum dots in a magnetic field // *Physica B*, -1998. -Vol. 147.
21. *T. Swahn, E. N. Bogachev, Yu. M. Galperin, M. Jonson, and R. I. Shekhter*, Nonequilibrium magnetization in a ballistic quantum dot // *Phys. Rev. Lett.* -1994. -Vol. 73.
22. *Tan W. C. and Inkson J. C.*, Magnetization persistent currents and their relation in quantum rings and dots // *Phys. Rev. B* -1999. -Vol. 60.
23. *Tanaka K.*, Semiclassical Study of the Magnetization of a Quantum Dot // *Ann. Phys.* -1998. -Vol. 268.
24. *Tarucha S., Honda T., Austing D. G., et al.*, Spin effects in semiconductor quantum dot structures // *Physica E*, -1998. -Vol. 112.
25. *Voskoboynikov O., Lee C. P., and Tretyak O.*, Spin-orbit splitting in semiconductor quantum dots with parabolic confinement potential // *Phys. Rev. B* -2001. -Vol. 63.
26. *Voskoboynikov A., Liu Shiue Shin, Lee C. P. and Tretyak O.*, Spin-polarized electronic current in resonant tunneling heterostructures // *J. App. Phys.* -2000. -Vol. 87.

**The description of magnetic properties of quantum rings
in the presence of the spin-orbit interaction**
Oleksandr S. Bauzha, Oleksandr M. Voskobyonikov, Oleg V. Tretyak